МАТЕМАТИКА

УДК 519.718

М. А. Алехина, А. В. Рыбаков

СИНТЕЗ И СЛОЖНОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО НАДЕЖНОСТИ КЛЕТОЧНЫХ СХЕМ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Работа относится к одному из важнейших разделов математической кибернетики – теории синтеза, надежности и сложности управляющих систем. Хорошо известны такие модели вычисления дискретных функций, как схемы из функциональных элементов. Эти схемы как из абсолютно надежных, так и ненадежных элементов изучаются давно, для них получено большое число результатов. Однако в реальных схемах приходится учитывать не только функционирование элементов, но и геометрию схемы. В связи с этим была предложена модель клеточных схем из функциональных элементов, где схема представляется в виде прямоугольника, разделенного на клетки, в которых располагаются элементы схемы, имеющие определенные размеры и занимающие некоторую площадь. Клеточные элементы могут быть как функциональными, т.е. реализующими какую-то функцию от своих входов, так и коммутационными, которые служат для передачи сигнала к следующему элементу с возможным изменением направления. В работе предполагается, что коммутационные элементы абсолютно надежны, а на любом из двух выходов каждого из функциональных элементов с одной и той же вероятностью независимым образом появляются инверсные неисправности. Такие схемы являются естественной математической моделью интегральных схем, в связи с чем имеют множество приложений в различных разделах науки и техники и являются актуальными для исследований. Цель работы – построить асимптотически оптимальные по надежности клеточные схемы и оценить их сложность.

Материалы и методы. Для построения асимптотически оптимальных по надежности клеточных схем использован метод, в основе которого лежит метод синтеза асимптотически оптимальных по надежности схем из функциональных элементов. Для этого метода были построены клеточные схемы, доказаны соответствующие теоремы о верхней и нижней оценках ненадежности и оценена сложность построенных схем.

Результаты. Предложен метод синтеза асимптотически оптимальных по надежности клеточных схем. Получены верхняя и нижняя оценки ненадежности этих схем. Впервые доказана оценка сложности асимптотически оптимальных по надежности клеточных схем.

Выводы. Для построения асимптотически оптимальных по надежности клеточных схем можно использовать методы синтеза асимптотически оптимальных по надежности схем из функциональных элементов.

Ключевые слова: клеточные схемы, функциональные и коммутационные элементы, синтез и сложность надежных клеточных схем.

---

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, номер проекта 14-01-00273.

M. A. Alekhina, A. V. Rybakov

SYTHESIS AND COMPLEXITY OF CELLULAR CIRCUITRY ASYMPTOTICALLY OPTIMAL BY RELIABILITY

Abstract.

Background. The work relates to one of the most important divisions of mathematical cybernetics – the theory of synthesis, reliability and complexity of control systems. Such models of discrete functions computing as functional elements circuits are well-known. These circuits, consisting of absolutely reliable or unreliable elements, have been studied for a long time; researchers have obtained multiple results for them. However in real circuits it is necessary to take into account not just functional elements, but also circuit's geometry. Thereby, the authors suggested a model of cellular circuits consisting of functional elements, where the model is represented in the form of a rectangle, divided into cells, which contain circuit elements having certain sizes and occupying certain area. Cellular elements may be both functional, i.e. realizing some function from their inputs, and commutational, which transmit signals to a next element with possible alteration of direction. The study suggests that commutational elements are absolutely reliable, and inverse malfunctions occur independently on any of two functional element outputs with the same probability. Such circuits are a natural mathematical model of integral circuits and, therefore, have multiple applications in various fields of science and technology, and also appear to be relevant for research. The aim of the work is to build cellular circuits, asymptotically optimal by reliability, and to estimate complexity thereof.

Materials and methods. In order to build cellular circuits, asymptorically optimal by reliability, the authors used a method based on the method of synthesizing functional element circuits, asymptotically optimal by reliability. For this method the researchers built cellular circuits, proved the corresponding theorems on upper and lower reliability estimates and estimated the built circuits.

Results. The authors suggested a method of synthesis of cellular circuits, asymptotically optimal by reliability, and obtained upper and lower reliability estimates of the said circuits. For the first time the authors proved the estimate of complexity of cellular circuits, asymptotically optimal by reliability.

Conclusions. In order to build cellular circuits, asymptotically optimal by reliability, it is possible to use the methods of synthesis of functional element circuits, asymptotically optimal by reliability.

Key words: cellular circuits, functional and commutational elements, synthesis and complexity of reliable cellular circuits.

Введение и постановка задачи

Впервые задачу синтеза надежных схем, реализующих булевы функции и состоящих из ненадежных функциональных элементов (ФЭ), рассматривал Дж. фон Нейман [1]. Он предполагал, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0;\ 1/2)$) подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию ϕ, а в неисправном – функцию $\bar{\phi}$. С помощью итерационного метода Дж. фон Нейман установил, что в произвольном полном базисе при $\varepsilon \in (0;\ 1/6)$ любую булеву функцию можно реализовать схемой, вероятность ошибки на выходе которой при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c_1\varepsilon$ (c_1 – некоторая константа, зависящая от базиса). Затем схемы с инверсными неисправностями на выходах элементов исследовались в работах С. И. Ортюкова [2], Д. Улига [3] и некоторых других авторов, причем главное внимание уделялось сложности надежных схем. В работах [2, 3] были построены асимптотически оптимальные по сложности схемы, функционирующие с некоторым уровнем надежности (задача синтеза оптимальных по надежности схем до появления работ М. А. Алехиной не ставилась).

Асимптотически оптимальные по надежности схемы, реализующие булевы функции, в базисе $\{x \,\&\, y, x \vee y, \bar{x}\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов построены А. В. Васиным [4], а в работе М. А. Алехиной и С. И. Аксенова [5] доказано, что сложность таких схем превышает сложность схем, построенных из абсолютно надежных элементов, асимптотически не более чем в 3 раза.

В этой статье рассматривается реализация булевых функций клеточными схемами (КС) (еще их называют плоскими схемами), содержащими как надежные, так и ненадежные элементы, и оценивается их ненадежность и сложность. Кратко, без доказательств оценки ненадежности и сложности для клеточных схем приведены в работах [6, 7], а в этой статье эти оценки удалось улучшить. Определение КС можно найти, например, в работе С. С. Кравцова [8], где получены оценки сложности КС в предположении, что все элементы схемы абсолютно надежны. Введем необходимые понятия и определения для случая, когда некоторые из базисных элементов ненадежны.

Как и в [8], предполагается, что базис содержит два типа элементов: функциональные (рис. 1) и коммутационные (рис. 2). Каждый из этих элементов может быть повернут на плоскости на угол $\frac{k\pi}{2}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$.

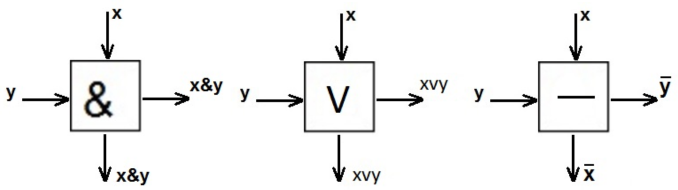

Рис. 1

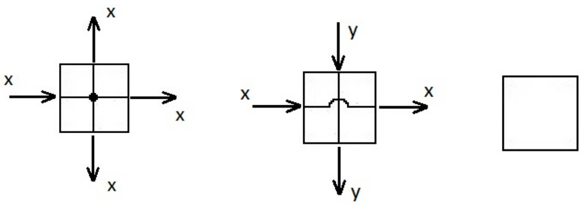

Рис. 2

Предполагается, что коммутационные элементы абсолютно надежны, а на любом из двух выходов каждого из функциональных элементов с вероятностью ε (ε ∈ (0; 1/2)) независимым образом появляются инверсные неисправности.

Для определенности будем считать, что входы клеточной схемы расположены на верхней границе, а функция выводится на самом правом нижнем элементе (см. рис. 1, 2), как показано на рис. 3.

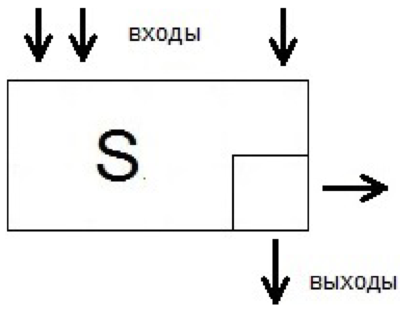

Рис. 3

Считаем, что КС, содержащая ненадежные элементы, реализует булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ ($\tilde{x}^n = (x_1, ..., x_n)$), если она реализует $f(\tilde{x}^n)$ при отсутствии неисправностей.

Пусть КС S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Обозначим через $P_{\overline{f(\tilde{a}^n)}}(S, \tilde{a}^n)$ вероятность появления ошибки на входном наборе $\tilde{a}^n$ схемы S. *Ненадежность* $P(S)$ клеточной схемы S определяется как максимальная вероятность ошибки на выходе схемы при всевозможных входных наборах схемы (т.е. так же, как и для схемы из функциональных элементов). *Надежность* схемы S равна $1 - P(S)$.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf\limits_{S} P(S)$, где инфимум берется по всем схемам S, реализующим функцию f. Клеточная схема A, реализующая функцию f, называется *асимптотически оптимальной по надежности*, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$.

Сложность КС, которая, напомним, имеет вид прямоугольника, определяется как площадь этого прямоугольника. Определим две функции Шеннона для площади схем этой модели. Обозначим высоту клеточной схемы S через $h(S)$, длину через $\lambda(S)$ и будем считать, что $h(S) \le \lambda(S)$.

Пусть f – произвольная булева функция. Обозначим через $L(f)$ наименьшую из площадей $L(S) = h(S)\lambda(S)$, где минимум берется по всем КС S, реализующим функцию f, а через $L(n)$ – функцию Шеннона, которая равна $L(n) = \max L(f)$, где максимум берется по всем функциям f от n переменных.

Аналогично определяется функция Шеннона $L^h(n)$ для случая, когда высота h клеточных схем фиксирована.

Для клеточных схем из абсолютно надежных элементов в работе [9] получена асимптотика функции Шеннона (в произвольном базисе при $h \ge 4$, а в рассматриваемом базисе при $h \ge 3$), которая имеет вид $L^h(n) \sim \dfrac{h2^n}{\log n}$.

Цель работы: построить асимптотически оптимальные по надежности КС и оценить их сложность.

1. Вспомогательные результаты

Теорема 1 [10]. При всех $p \in [0,1]$ и $k \geq 3$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=2}^{k} C_k^i p^i (1-p)^{k-i} \leq p^2 C_k^2 .$$

Обозначим через $K(n)$ ($n \geq 3$) множество булевых функций $f(\tilde{x}^n)$, зависящих от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и не представимых в виде 0, 1, $(x_i^a \,\&\, g(\tilde{x}^n))^b$ ($i \in \{1,2,...,n\}$, $a, b \in \{0, 1\}$, $g(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция). Пусть $K = \bigcup_{n=3}^{\infty} K(n)$.

Теорема 2 [4]. Пусть функция $f \in K$ и пусть S − любая схема из функциональных элементов, реализующая функцию f. Тогда

$$P(S) \geq 3\varepsilon - 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3$$

при всех $\varepsilon \in (0,1/6]$.

2. Верхние оценки ненадежности схем

Для повышения надежности исходной схемы *S* будем использовать схему $\psi(S)$ (см. рис. 2), а зависимость ненадежности схемы $\psi(S)$ от ненадежности схемы *S* установлена в следующей теореме.

Теорема 3. Пусть *f* – произвольная булева функция; *S* – любая клеточная схема, реализующая функцию *f*. Тогда клеточная схема $\psi(S)$ (рис. 4) реализует функцию *f* с ненадежностью

$$P(\psi(S)) \leq 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + 12\varepsilon P(S) + 3P^2(S), \quad (1)$$

где *P*(*S*) – ненадежность схемы *S*.

Доказательство. Применяя формулу полной вероятности, оценим вероятности появления ошибок на выходе схемы $\psi(S)$ (рис. 4).

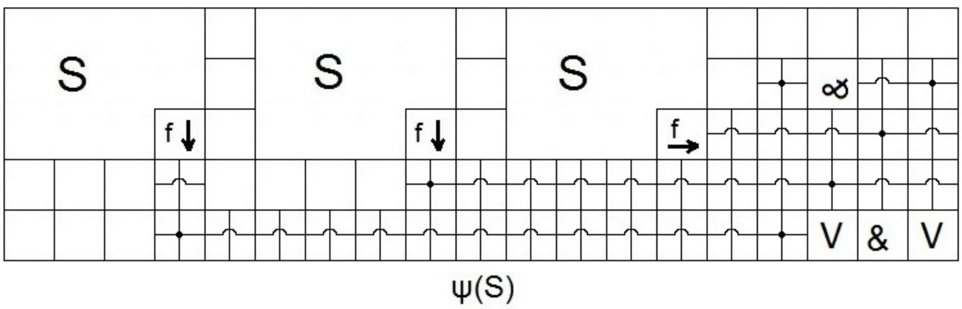

Рис. 4

Пусть набор $\tilde{a}^n$ такой, что $f(\tilde{a}^n)=0$, тогда вероятность $P_1(S,\tilde{a}^n)$ появления 1 на выходе схемы $\psi(S)$ удовлетворяет неравенству

$$P_1(\psi(S),\tilde{a}^n)\le v_0(1-P_1(S,\tilde{a}^n))^3+$$
$$+3P(S_g)\,P_1(S,\tilde{a}^n)+\sum_{i=2}^{3}C_3^i(P_1(S,\tilde{a}^n))^i(1-P_1(S,\tilde{a}^n))^{3-i}, \qquad (2)$$

где v_0 – вероятность появления 0 на выходе подсхемы C (рис. 4), а $P(S_g)$ – ненадежность схемы S_g. Поскольку $P(S_g)\le 4\varepsilon$, из неравенства (2) получается неравенство

$$P_1(\psi(S),\tilde{a}^n)\le v_0(1-P_1(S,\tilde{a}^n))^3+$$
$$+12\varepsilon P_1(S,\tilde{a}^n)+\sum_{i=2}^{3}C_3^i(P_1(S,\tilde{a}^n))^i(1-P_1(S,\tilde{a}^n))^{3-i}. \qquad (3)$$

По теореме 1 оценим третье слагаемое в (3):

$$\sum_{i=2}^{3}C_3^i(P_1(S,\tilde{a}^n))^i(1-P_1(S,\tilde{a}^n))^{3-i}\le C_3^2(P_1(S,\tilde{a}^n))^2=3(P_1(S,\tilde{a}^n))^2.$$

Подставляя эту оценку в (3) и учитывая, что $1-P_1(S,\tilde{a}^n)\le 1$, получим неравенство

$$P_1(\psi(S),\tilde{a}^n)\le v_0+12\varepsilon P_1(S,\tilde{a}^n)+3(P_1(S,\tilde{a}^n))^2. \qquad (4)$$

Пусть набор $\tilde{a}^n$ такой, что $f(\tilde{a}^n)=1$, тогда, рассуждая так же, как в предыдущем случае, получим неравенство для вероятности $P_0(S,\tilde{a}^n)$ появления 0 на выходе схемы $\psi(S)$:

$$P_0(\psi(S),\tilde{a}^n)\le v_1+12\varepsilon P_0(S,\tilde{a}^n)+3(P_0(S,\tilde{a}^n))^2, \qquad (5)$$

где v_1 – вероятность появления 1 на выходе подсхемы C (см. рис. 4).

Теперь найдем вероятности v_0 и v_1 появления 0 и 1 соответственно на выходе подсхемы C:

$$v_1=3(1-\varepsilon)^2\varepsilon+\varepsilon^2(1-\varepsilon)=3\varepsilon-5\varepsilon^2+2\varepsilon^3,$$

$$v_0=(1-\varepsilon)\varepsilon+\varepsilon\Big\{(1-\varepsilon)\big[(1-\varepsilon)\varepsilon+\varepsilon(1-\varepsilon)\big]+\varepsilon\Big[(1-\varepsilon)^2+\varepsilon^2\Big]\Big\}=\varepsilon+2\varepsilon^2-6\varepsilon^3+4\varepsilon^4.$$

Подставляя эти оценки в (4) и (5), а также учитывая, что вероятность ошибки на выходе схемы не больше ее ненадежности, получим неравенство:

$$P(\psi(S))\le\max\{3\varepsilon-5\varepsilon^2+2\varepsilon^3+12\varepsilon P(S)+3P^2(S),\varepsilon+2\varepsilon^2-6\varepsilon^3+4\varepsilon^4+$$
$$+12\varepsilon P(S)+3P^2(S)\}=3\varepsilon-5\varepsilon^2+2\varepsilon^3+12\varepsilon P(S)+3P^2(S).$$

Теорема 3 доказана.

Используя теорему 3, получим верхнюю оценку ненадежности схем.

Теорема 4. Любую булеву функцию f можно реализовать клеточной схемой S с ненадежностью $P(S) \le 3\varepsilon + 240\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0,1/1000]$.

Доказательство. В работе [4] доказана аналогичная теорема для схем из функциональных элементов. Проведем рассуждения для случая клеточных схем с помощью метода математической индукции по числу n – переменных функции $f(\tilde{x}^n)$.

Докажем утверждение для $n = 1$, т.е. для всех возможных булевых функций, зависящих от одной переменной: 0, 1, x и $\bar{x}$. Эти функции можно реализовать схемами, изображенными на рис. 5. Очевидно, что ненадежность каждой из этих схем не более 2ε, т.е. для $n = 1$ теорема верна.

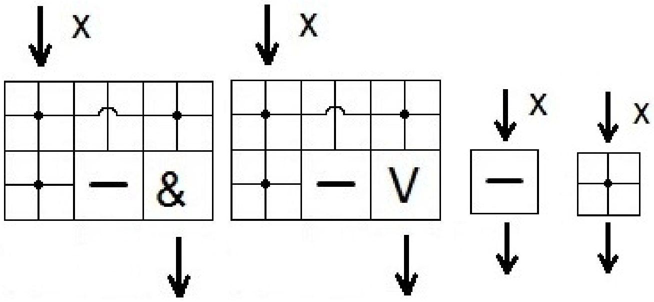

Рис. 5

Пусть индуктивное предположение верно для функций с числом переменных $n-1$. Докажем, что оно верно для функций $f(x_1,...,x_n)$. Разложим функцию $f(x_1,...,x_n)$ по последней переменной x_n:

$$f(x_1,...,x_{n-1},x_n) = x_n f(x_1,...,x_{n-1},1) \vee \bar{x}_n f(x_1,...,x_{n-1},0),$$

и реализуем следующей схемой S_2 (рис. 6), где схема S_1 реализует функцию $f_1 = f(x_1,...,x_{n-1},1)$, а схема S_0 реализует функцию $f_0 = f(x_1,...,x_{n-1},0)$.

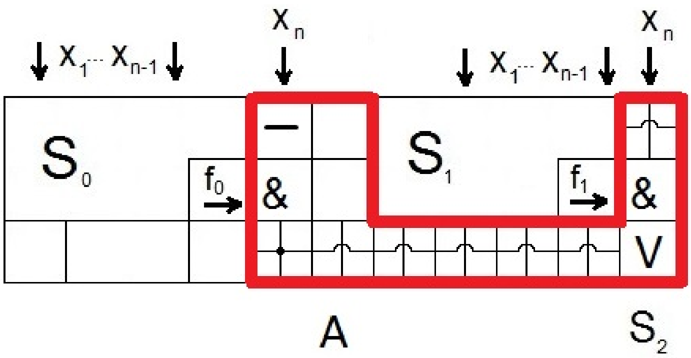

Рис. 6

Обозначим через A подсхему, получаемую из схемы S_2 удалением схем S_0 и S_1 (рис. 6). Очевидно, что выход схемы A является выходом схемы S_2, а на входы подаются значения x_n, $f_1 = f(x_1,...,x_{n-1},1)$ и $f_0 = f(x_1,...,x_{n-1},0)$.

Выделенная подсхема A содержит четыре функциональных элемента, поэтому ее ненадежность $P(A) \le 4\varepsilon$. Каждую из функций $f_1 = f(x_1,...,x_{n-1},1)$ и $f_0 = f(x_1,...,x_{n-1},0)$ согласно индуктивному предположению можно реализовать схемой с ненадежностью не более $3\varepsilon + 240\varepsilon^2$. Если схема A исправна, то для реализации функции f она использует значение только одной из схем, реализующих функции f_1 и f_0. Поэтому

$$P(S_2) \le 3\varepsilon + 240\varepsilon^2 + 4\varepsilon \le 7\varepsilon + 240\varepsilon^2 \le 7{,}24\varepsilon \text{ при } \varepsilon \in (0{,}1/1000].$$

По схеме S_2 построим схему $S_3 = \psi(S_2)$, реализующую ту же самую функцию $f(x_1,...,x_n)$ (см. рис. 4).

Используя соотношение (1) из теоремы 3 и условие $\varepsilon \in (0{,}1/1000]$, оценим ненадежность схемы S_3:

$$P(S_3) = P(\psi(S_2)) \le 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + 12\varepsilon P(S_2) + 3P^2(S_2) \le$$

$$\le 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 0{,}2\varepsilon^2 + 244{,}14\varepsilon^2 \le 3\varepsilon + 240\varepsilon^2.$$

Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 следует, что любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически не больше 3ε при $\varepsilon \to 0$.

3. Нижние оценки ненадежности

Напомним, что $K(n)$ ($n \ge 3$) – множество булевых функций $f(\tilde{x}^n)$, зависящих от переменных $x_1, x_2,...,x_n$ и не представимых в виде 0, 1, $(x_i^a \,\&\, g(\tilde{x}^n))^b$ ($i \in \{1,2,...,n\}$, $a, b \in \{0,1\}$, $g(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция); $K = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} K(n)$. Справедлива теорема о нижней оценке ненадежности клеточных схем.

Теорема 5. Пусть функция $f \in K$ и пусть S − любая клеточная схема, реализующая функцию f. Тогда $P(S) \ge 3\varepsilon - 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3$ при всех $\varepsilon \in (0{,}1/6]$.

Доказательство. По определению клеточной схемы, данному в [6], каждой такой схеме должна соответствовать некоторая схема из «обычных» функциональных элементов, причем клеточный базисный элемент заменяется соответственно парой функциональных элементов, как показано на рис. 7.

Пусть булева функция $f \in K$ и пусть S − любая клеточная схема, реализующая эту функцию. Поставим в соответствие схеме S схему S' из функциональных элементов. Для схемы S' по теореме 2 верно утверждение о нижней оценке. Поскольку все коммутационные элементы абсолютно надежны, это же утверждение верно и для исходной клеточной схемы S.

Теорема 5 доказана.

Из теоремы 5 следует, что любая схема, реализующая функцию $f \in K$, функционирует с ненадежностью, которая асимптотически не меньше 3ε при $\varepsilon \to 0$.

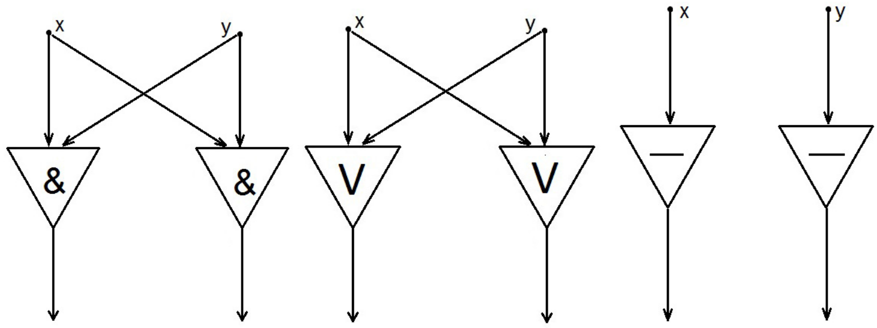

Рис. 7

Таким образом, из теорем 4 и 5 получаем следующий результат: любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 4 и реализующая булеву функцию $f \in K$, является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной 3ε при $\varepsilon \to 0$.

4. Сложность асимптотически оптимальных по надежности схем

В этом разделе оценим сложность асимптотически оптимальных по надежности клеточных схем.

Лемма 1. Если любую функцию $g(\tilde{x}^{n-1})$ можно реализовать КС длины λ_{n-1} и ширины h_{n-1}, то любую функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать КС длины $\lambda_n = 2\lambda_{n-1} + 3$ и ширины $h_n = h_{n-1} + 1$.

Доказательство очевидно (см. рис. 6).

Лемма 2. Если любую функцию *f* можно реализовать КС *S* длины $\lambda(S)$ и ширины $h(S)$, то схема $\psi(S)$ (рис. 4), которая также реализует функцию *f*, имеет длину $\lambda(\psi(S)) = 3\lambda(S) + 7$ и ширину $h(\psi(S)) = h(S) + 2$.

Доказательство очевидно (см. рис. 4).

Справедлива теорема 6.

Теорема 6. Любую булеву функцию $f(x_1, ..., x_n)$ можно реализовать такой клеточной схемой *C*, что $P(C) \le 3\varepsilon + 240\varepsilon^2$, $L(C) \le 3{,}1n6^n$ при всех $\varepsilon \in (0{,}1/1000]$.

Доказательство. Вычислим сложность схемы, построенной при доказательстве теоремы 3 (напомним, что доказательство проводилось индукцией по числу *n* переменных функции $f(\tilde{x}^n)$). Обозначим длину схемы *S* через $\lambda(S)$, а ее высоту – через $h(S)$. Тогда сложность схемы *S* равна $L(S) = \lambda(S)h(S)$. При $n = 1$ очевидно $\lambda_1 \le 3$, $h_1 \le 2$ (см. рис. 5). Нижний индекс при длине и высоте указывает на номер *n* шага индукции). С каждым шагом (см. лемму 1) индукции высота схемы увеличивается на 2, т.е. $\tilde{h}_n = h_{n-1} + 1$, а для длины верно равенство $\tilde{\lambda}_n = 2\lambda_{n-1} + 3$. Затем по схеме *S* строится схема $\psi(S)$, длину и ширину которой можно найти с помощью леммы 2. Тогда получим соотношения для длины и ширины схем, реализующих функции $n - 1$ и n переменных и имеющих ненадежность, не более $3\varepsilon + 240\varepsilon^2$:

$$\lambda(\psi(S)) = 3\lambda(S) + 7 = 3(2\lambda_{n-1} + 3) + 7 = 6\lambda_{n-1} + 16, \text{ т.е. } \lambda_n = 6\lambda_{n-1} + 16;$$

$$h(\psi(S)) = h(S) + 2 = h_{n-1} + 3, \text{ т.е. } h_n = h_{n-1} + 3.$$

Таким образом, имеем рекуррентные соотношения для величин $\lambda_n = 6\lambda_{n-1} + 16$ и $h_n = h_{n-1} + 3$ и начальные условия $\lambda_1 \le 3$, $h_1 \le 2$, из которых получаем неравенства

$$h_n \le 3n - 1, \; \lambda_n \le \frac{31}{30} 6^n - \frac{16}{5}.$$

Тогда сложность схемы C, реализующей функцию $f(\tilde{x}^n)$ с ненадежностью $P(C) \le 3\varepsilon + 240\varepsilon^2$, равна $L(C) = \lambda_n h_n \le 3{,}1n6^n$.

Теорема 6 доказана.

Схемы, удовлетворяющие условиям теоремы 6, являются асимптотически оптимальными по надежности для почти всех функций, однако их сложность существенно превышает сложность асимптотически оптимальных по сложности клеточных схем, построенных из абсолютно надежных элементов.

Цель дальнейших исследований авторов – найти метод синтеза асимптотически оптимальных по надежности клеточных схем, позволяющий улучшить оценку сложности схем.

Список литературы

1. **von Neuman, J.** Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components / J. von Neuman // Automata studies / ed. by Shannon C., Mc. Carthy J. – Princeton University Press, 1956.
2. **Ортюков, С. И.** Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов / С. И. Ортюков // Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 27–29 января 1987 г.). – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1989. – С. 166 – 168.
3. **Uhlig, D.** Reliable networks from unreliable gates with almost minimal comlexity / D. Uhlig // Fundamentals of Computation Theory. Intern. conf. FCT'87 (Kazan, June 1987). Proc. – Berlin : Springer-Verl., 1987. – P. 462–469.
4. **Васин, А. В.** Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x \& y,\ x \vee y, \bar{x}\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов / А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – № 4. – 2008. – С. 2–16.
5. **Алехина, М. А.** О сложности надежных схем при инверсных неисправностях / М. А. Алехина, С. И. Аксенов // Дискретная математика и ее приложения : материалы IX Междунар. семинара [Посвящ. 75-летию со дня рождения О. Б. Лупанова] (Москва, 18–23 июня 2007 г.). – М. : Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 2007. – С. 56–59.
6. **Рыбаков, А. В.** Оценки ненадежности клеточных схем / А. В. Рыбаков // Открытые инновации – вклад молодежи в развитие региона : сб. материалов регионального молодежного форума (Россия, г. Пенза, 22 ноября 2013 г.). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. – С. 164–165.

7. **Рыбаков, А. В.** Сложность асимптотически оптимальных по надежности клеточных схем / А. В. Рыбаков // Университетское образование : сб. ст. XVIII Междунар. науч.-метод. конф. (МКУО–2014) (г. Пенза, 10–11 апреля 2014 г.). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – С. 310–311.
8. **Кравцов, С. С.** О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов / С. С. Кравцов // Проблемы кибернетики. – Вып. 19. – М. : Наука, 1967. – С. 285–292.
9. **Улесова, А. Ю.** Сложность реализации булевых функций в некоторых моделях клеточных схем / А. Ю. Улесова. – Москва : МГУ им. Ломоносова, факультет ВМиК, кафедра математической кибернетики, 2010. – 25 с.
10. **Алехина, М. А.** Об одной оценке вероятности ошибки / М. А. Алехина, А. Е. Лакомкина, Ю. Д. Ильина // Открытые инновации – вклад молодежи в развитие региона : сб. материалов регионального молодежного форума (Россия, г. Пенза, 22 ноября 2013 г.). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. – С. 11–12.

References

1. von Neuman J. *Automata studies*. Ed. by Shannon C., Mc. Carthy J. Princeton University Press, 1956.
2. Ortyukov S. I. *Trudy seminara po diskretnoy matematike i ee prilozheniyam (Moskva, 27–29 yanvarya 1987 g.)* [Proceedigns of the seminar on discrete mathematics and application thereof (Moscow, 27-29 January 1987)]. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 1989, pp. 166 – 168.
3. Uhlig D. *Fundamentals of Computation Theory. Intern. sonf. FCT'87 (Kazan, June 1987). Proc.* Berlin: Springer-Verl., 1987, pp. 462–469.
4. Vasin A. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2008, no. 4, pp. 2–16.
5. Alekhina M. A., Aksenov S. I. *Diskretnaya matematika i ee prilozheniya: materialy IX Mezhdunar. seminara* (*Moskva, 18–23 iyunya 2007 g.*) [Discrete mathematics and applications thereof: proceedings of IX International seminar (commemorating 75th jubilee of O.B. Lupanov) (Moscow, 18-23 June 2007)]. Moscow: Izd-vo mekh.-mat. fak-ta MGU, 2007, pp. 56–59.
6. Rybakov A. V. *Otkrytye innovatsii – vklad molodezhi v razvitie regiona: sb. materialov regional'nogo molodezhnogo foruma (Rossiya, g. Penza, 22 noyabrya 2013 g.)* [Open innovations – youth’s contribution into regional development (Russia, Penza, 22 November 2013)]. Penza : Izd-vo PGU, 2013, pp. 164–165.
7. Rybakov A. V. *Universitetskoe obrazovanie: sb. st. KhVIII Mezh-dunar. nauch.-metod. konf.* (MKUO–2014) (*Penza, 10–11 aprelya 2014 g.*) [University education: collected articles of XVIII International scientific and methodological conference (Penza, 10-11 April 2014)]. Penza: Izd-vo PGU, 2014, pp. 310–311.
8. Kravtsov S. S. *Problemy kibernetiki* [Problems of cybernetics]. Issue 19. Moscow: Nauka, 1967, pp. 285–292.
9. Ulesova A. Yu. *Slozhnost' realizatsii bulevykh funktsiy v nekotorykh modelyakh kletochnykh skhem* [Complexity of Boolean functions realization in some models of cellular circuits]. Moscow: MGU im. Lomonosova, fakul'tet VMiK, kafedra matematicheskoy kibernetiki, 2010, 25 p.
10. Alekhina M. A., Lakomkina A. E., Il'ina Yu. D. *Otkrytye innovatsii – vklad molodezhi v razvitie regiona: sb. materialov regional'nogo molodezhnogo foruma* (*Rossiya, g. Penza, 22 noyabrya 2013 g.*) [Open innovations – youth’s contribution into regional development (Russia, Penza, 22 November 2013)]. Penza: Izd-vo PGU, 2013, pp. 11–12.

Алехина Марина Анатольевна
доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой дискретной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: alehina@pnzgu.ru

Alekhina Marina Anatol'evna
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of discrete mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Рыбаков Андрей Валентинович
аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: dm@pnzgu.ru

Rybakov Andrey Valentinovich
Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 519.718

Алехина, М. А.

Синтез и сложность асимптотически оптимальных по надежности клеточных схем / М. А. Алехина, А. В. Рыбаков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 4 (32). – С. 5–16.